

2026 年度 第一回 探究道場 瓦プロジェクト 理論冊子

第八代探究道場 対面班理論チーム

1. Mission

衝撃に耐える強い瓦をつくれ

2. 語句の定義

議論を進めるうえで必要な語句を以下のように定義する。

- 「素材」…均一の材質を持った加工前の原料。
- 「材料」…目的や用途を持って素材を加工した物体。
- 「構造」…一つのもを作り上げている各部分の素材の組み合わせ方のこと。

3. 曲げモーメントについて

瓦を曲げようとする力に関わるパラメータ（変数）には、その力の絶対的な大きさだけでなく、その力が作用する点の支点からの距離が関係し、瓦を曲げようとする力の大きさはその 2 変数の積で表される。このような物体を回転させようとする力の大きさを表す物理量のことを**モーメント**という。モーメントとして身近な例としては、てこの原理がある。

4. 瓦が壊れるメカニズム

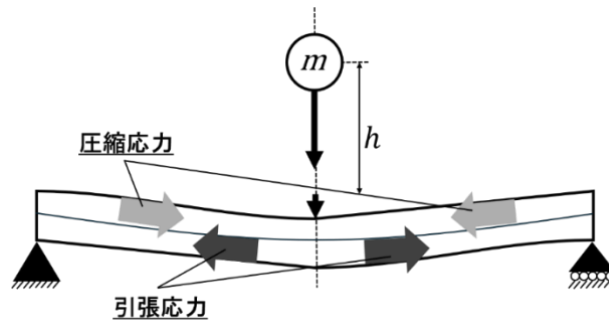


図 1: 瓦にかかる力

以下では、

P : 外力に対して物体に働く内力 (N) A : 物体の断面積 (m^2)

σ : 応力 (N) ε : ひずみ

l : 瓦の横幅 E : 縦弾性係数 (ヤング率)

とする。

重い物が落ちると、図 1 のように、瓦の上部には押し縮める力、瓦の下部には引っ張る力がかかる。物体内部にはこの力に対する反作用（内力）が生まれる。単位面積当たりの内力のことを**応力**といい、この応力が外力に耐えきれなくなったとき、物体がその部分で破壊されると考えることができる。

したがって、応力は(3.1)のように表される。

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3.1)$$

瓦がどれくらい曲げモーメントによって変形したかを表す指標が**ひずみ**である。ある連続体に引張荷重のみをかけたときに、もとの長さからどれくらい変形したかを表す指標と言い換えることができる。

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (3.2)$$

ちなみに今回の瓦の場合には働くのは引張応力だけでないので、また異なる定義が必要である。

材料の中の一点が変形前と変形後でどのように変位するかということである。ただこの冊子では、近似的に変形面を表す関数 $w(x)$ の y 座標の変化で議論を進める（実際は 3 次元の問題であるため、近似的にひずみを求めるためには 2 変数関数 $w(x, y)$ で考える必要がある）。

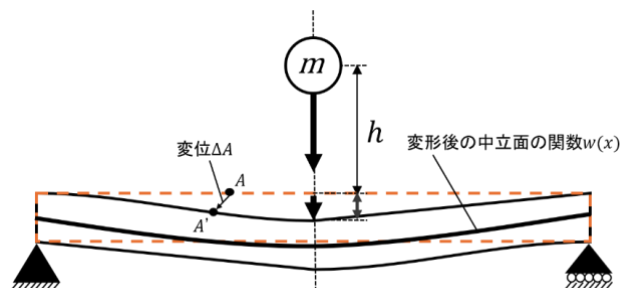


図 2 物体の変形面を表す関数とひずみの定義

応力とひずみの関係は

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.3)$$

これらをまとめると

$$\frac{P}{A} = E \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (3.4)$$

と定義される。

図 2 は σ と ε の関係についてのグラフである。外力によってひずみを大きくしていくとどのように応力が変化し、どこで応力が限界を迎え、破断を始めるかを示す。

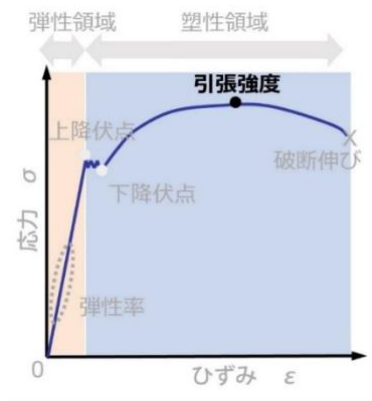


図 3: 引張試験における応力ひずみ線図

図 3 より，次のようなことが言える。

- ① 弾性領域では、応力を取り除くとひずみが 0 に戻る。
- ② 塑性領域になると、応力がほとんど増加せずともひずみが増加する。
- ③ 下降伏点で応力が低下する。
- ④ 応力が増加しないとひずみも増加しなくなる。
- ⑤ 応力の最大に達すると、材料の最も弱い部分で応力集中が起き、材料の局部が収縮して破断する。

このような現象が，瓦の下部で発生し，瓦が破断していく。

図は曲げモーメントが瓦上の各点においてどのくらいの大きさではたらくかを示したものである。

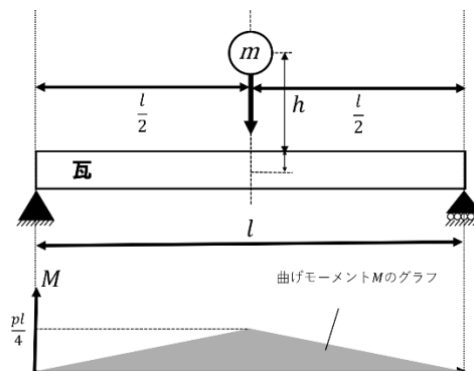


図 4 曲げモーメント図

図より，中点部分で，最も大きなモーメントがかかっていることが分かる。

5. 瓦にかかるひずみの最大値

瓦の仮想断面を考えると，その仮想断面にかかるモーメントは M であるから，

$$\int_A \sigma_x y dA = M \quad (5.1)$$

ここで，ひずみ ε は， $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ (ρ は曲率半径) と表されるので，式(3.3)より，

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M \quad (5.2)$$

したがって， $\int_A y^2 dA$ をその材料特有の値として， I_z と定義すると，

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad (5.3)$$

ρ は曲率半径というパラメータで，鉛直方向の仮想面の微小部分を球面としてもつ球の半径のことで，この値が小さくなるとより大きく曲がっているということになる。式から曲がりやすさにかかわってくるパラメータが見て取れる。

ここで，断面二次モーメント $I_z = \int_A y^2 dA$ は，中立面からの距離の2乗と，中立面からの距離 y の部分にある微小断面積 dA の積である（図参照）。したがって，中立面から遠いところほど断面積を大きくすることで，断面二次モーメントを大きくすることができる。

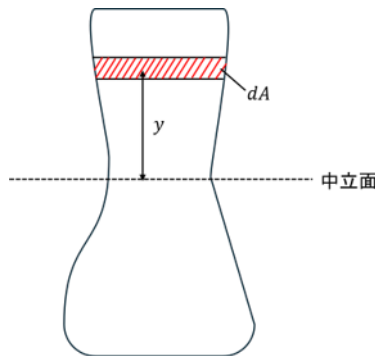


図 5 断面二次モーメントとは

ここからは，瓦の問題を2次元に落とし込み，簡略化して考える。

中立面の図形を視点からの距離 x の関数として考える (図)。

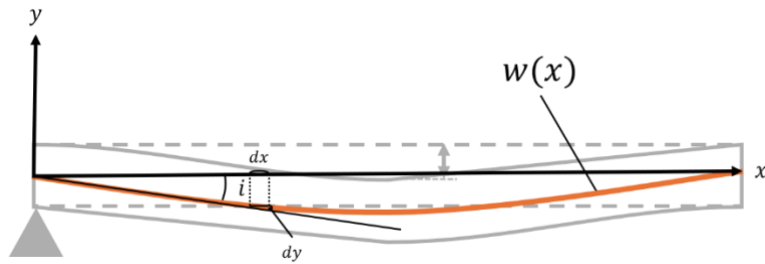


図 6 中立面の関数

たわみの微分方程式は,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI_z} \quad (5.4)$$

であるから, 関数 $w(x)$ は, 荷重を P とすると, 図 4 より, $y = \frac{Px}{2}$ だから,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Px}{2EI_z} \quad (5.5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{EI_z} \left(-\frac{1}{4}x^2 + C_1 \right)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{P}{EI_z} \left(-\frac{1}{12}x^3 + C_1x + C_2 \right)$$

ここで, 束縛条件として,

- 支点ではひずみが 0 ($x = 0 \Rightarrow y = 0$)
- 中点部分はひずみ角が 0 ($x = \frac{P}{2} \Rightarrow i = 0$)

これらの条件に従って微分方程式を解くと, 最大ひずみ y_{max} は,

$$y_{max} = \frac{pl^3}{48EI_z} \left(x = \frac{P}{2} \right) \quad (5.6)$$

したがって, ひずみを小さくする方法には,

- (1) 瓦の断面二次モーメントを大きくする (I_z を大きくする) こと

- (2) 瓦に伸び縮みにくい素材を用いる (E を大きくする) こと
 (3) 荷重を上部で分散し、土台の瓦にかかる荷重を減らす (p を小さくする) ことが挙げられる。

ここで、1 を実行すると、断面積 ($\neq$ 断面二次モーメント) が大きくなり、3 で十分に荷重を減らすための上部構造を作る空間的余裕がなくなってしまう可能性がある。よって 1 と 3 はトレードオフの関係性にあると考えられる (図参照)。

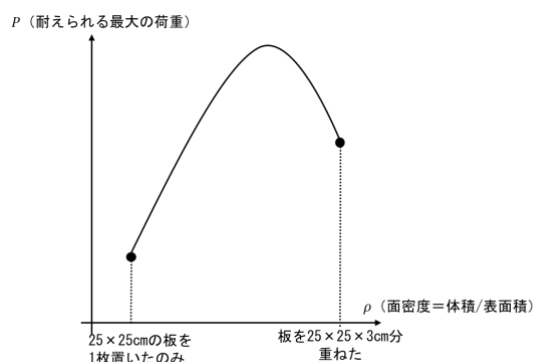


図 7 面密度と強度の関係

6. 瓦のひずみのシミュレーション

堀高生が瓦の構造を考え実際に検証を行ったもののうち、とくに強い耐久性を示した結果を以下に示す。

①トラス構造

落下物の質量 (kg)	0.1~0.7	1.0	1.5
紙コップ	潰れていない	潰れた	潰れた
分断	しなかった	しなかった	した

表 1 レイヤー構造 (の実験)

②レイヤー型

落下物の質量 (kg)	0.14~1.7	3.4
紙コップ	潰れていない	潰れた
分断	しなかった	した

表 2

これらの結果を受けて、理論的にこの構造が、実際にひずみが小さくなると計算されるのかを、シミュレーションで検証した。このシミュレーションでは有限要素法（複雑な構造体・連続体を、小さなメッシュに区切り、そのメッシュ同士の力の伝達等を計算することで、破壊等の材料の力学的挙動を調べる方法）という方式を用い、Free CAD で結果を出力している。

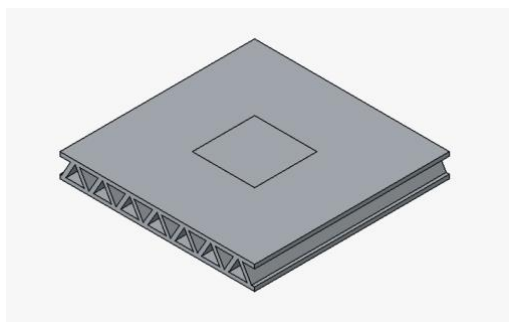


図 8

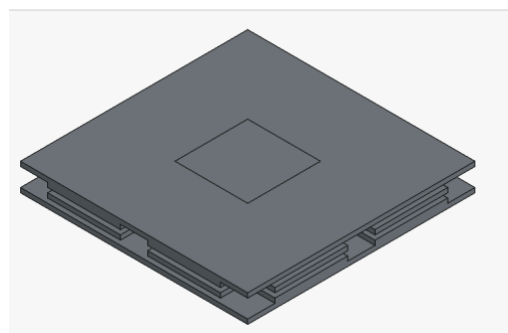


図 9

<結果>

	① トラス構造	② レイヤー構造
30.0N	0.35mm	0.70mm
100N	1.16mm	2.34mm
300N	3.47mm	7.03mm

表 3 かける荷重と最大ひずみに関する Free CAD での出力結果

トラス構造が、どの大きさの荷重でもレイヤー構造に比べて約 0.5 倍の最大ひずみとなった。トラス構造では、付録の図 A/B を見比べてもわかるように、力が鉛直方向に伝わることなく、三角形の構造で、力を逃がしていることがわかる。このことから、力を分散する構造を作るためには十分な構造をつくるための空間をつくり、断面積を減らすことが必要だと考えられる。ここからも 5 章に述べたようにトレードオフの関係性が見えるであろう。

今回のシミュレーションでは衝撃荷重ではなく、静的荷重をかけており、材料の端点の変位を許容しない境界条件で、現実の検証と少し異なる。

(シミュレーション結果の出力画面の写真は付録として同封しております。)

7. 瓦にかかる衝撃荷重の近似

横幅 l の土台の瓦に、中点部分に質量 m の物体が高さ h から初速度 0 で鉛直下向きに落下した際に衝撃荷重が瓦に蓄積させるひずみエネルギーと、それによって引き起

こされるひずみの最大値を近似する。

始めに瓦にかかる運動エネルギーが，一部熱エネルギーなどに変換されることなく，すべてひずみエネルギーに変換されると考えると，与えられるひずみエネルギーは，

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI_z} dx \quad (7.1)$$

集中荷重をかける場合を考えると，最大たわみ $\delta_A = \frac{Pl^3}{48EI}$ だから，瓦に蓄えられるエネルギーは，

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI_z} = \frac{384EI_z}{l^3} \delta_A^2 \quad (7.2)$$

質量 m の持つ位置エネルギーがすべて瓦の弾性エネルギーに変換されるとすれば，

$$mg(h + \delta) = \frac{384EI_z}{l^3} \delta^2 \quad (7.3)$$

質量 m の物体が静的荷重を瓦に及ぼすときの最大たわみ δ_0 は，

$$\delta_0 = \frac{mgl^3}{48EI_z} \quad (7.4)$$

(7.4)を(7.3)に代入すると，

$$\delta^2 - 2\delta_0\delta - 2\delta_0h = 0 \quad (7.5)$$

二次方程式(7.4)を解いて，

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_0}} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\delta}{\delta_0} &= 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_0}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

(7.6)をグラフ化すると，図のようになる。ここで，100Nの静的荷重を加えたとき

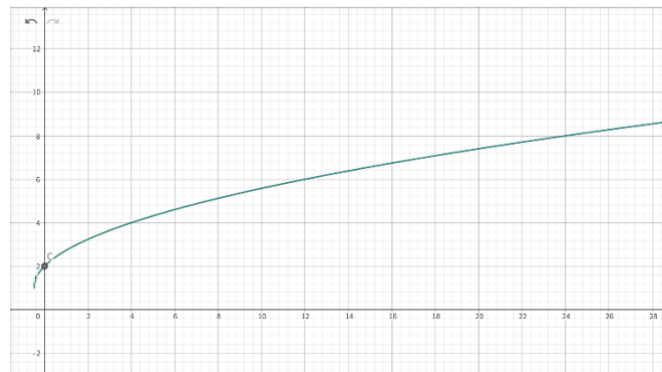


図 10 式(7.6)のグラフ

の最大ひずみ $\delta_0=0.57\text{mm}$ とすると、 $\frac{\delta}{\delta_0} \cong 43$ となる。したがって、1m の高さから物をおとすと、すでにその物体が瓦の上に静止している場合の約 43 倍の力がかかることがわかり、近似することができた。

8. 付録

ここでは、6 章で行ったシミュレーション結果の出力画面の写真を示す。色が大きいところほど大きくひずんでいることを示す。

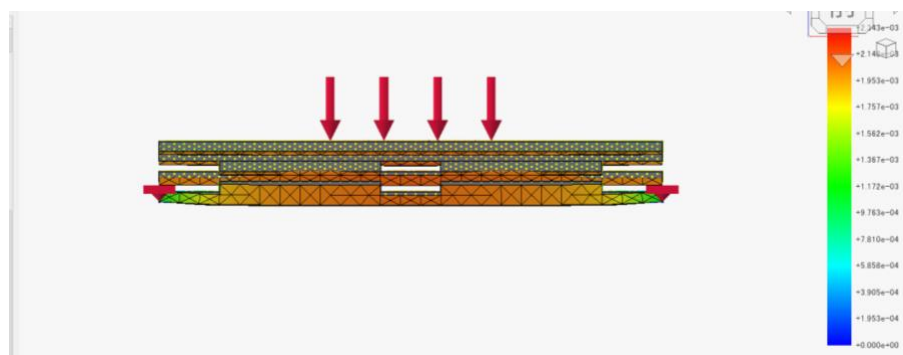


図 A レイヤー構造_ZX 平面図

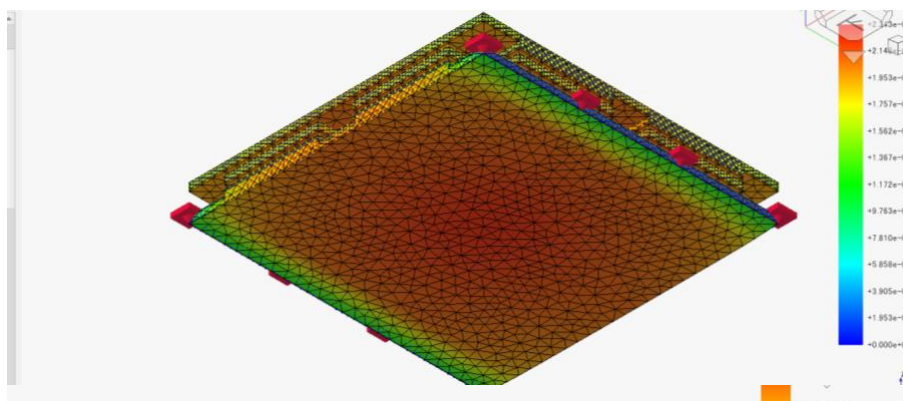


図 B レイヤー構造_下からの図

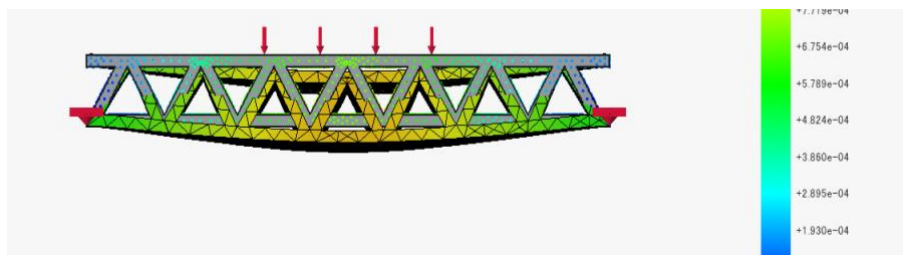


図 C トラス構造_ZX 平面図

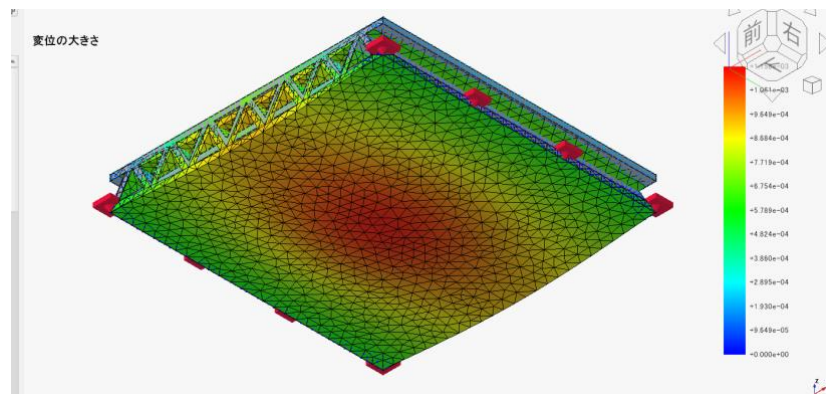


図 D トラス構造_下からの図

9. 参考文献

- (1) 宇津木 諭 (2014) 絵ときでわかる材料力学. オーム社
- (2) 竹園 茂男など (2007) 男性力学入門 基礎理論から数値解法まで, 森北出版株式会社