

2024 年度第 1 回理論補講

堀川高校 探究道場

2024 年 7 月 15 日

1 MISSION

2024 年度第 1 回「耐震プロジェクト」の MISSION は「**できるだけ高い建物を作れ!**」である。

2 方針

本冊子における MISSION 解決の方針は共振ができるだけ起こらないようにすることである。

3 固有振動数

3.1 固有振動数の性質

後半理論において、「物体には揺れやすい振動数」があると説明した。これこそが固有振動数¹⁾である。固有振動数ちょうどの振動を物体に与えると、その物体は他の振動数で振動を与えた場合よりも大きく振動(共振)する。

3.2 強制振動から固有振動数を求める

3.2.1 前提知識の導入

物体が変形すると、元の形に戻ろうとする力がはたらく。この力の大きさは、変形の程度に比例する。これを、フックの法則という。力を F ，変形の程度(変位)を x ，ばねの硬さ(物体の種類に依存する値)を k とする。フックの法則の式は式 1 のようになる。

$$F = kx \tag{1}$$

つぎに、単振動について紹介する。例としては、振り子の運動が一番身近であろう。今回は、のちの強制振動を説明するために図 1 のような場合での単振動について紹介する。自然長の位置を原点とした時のおもりの変位を x とする。

1) 物体の剛性および質量に依存して決まる数値

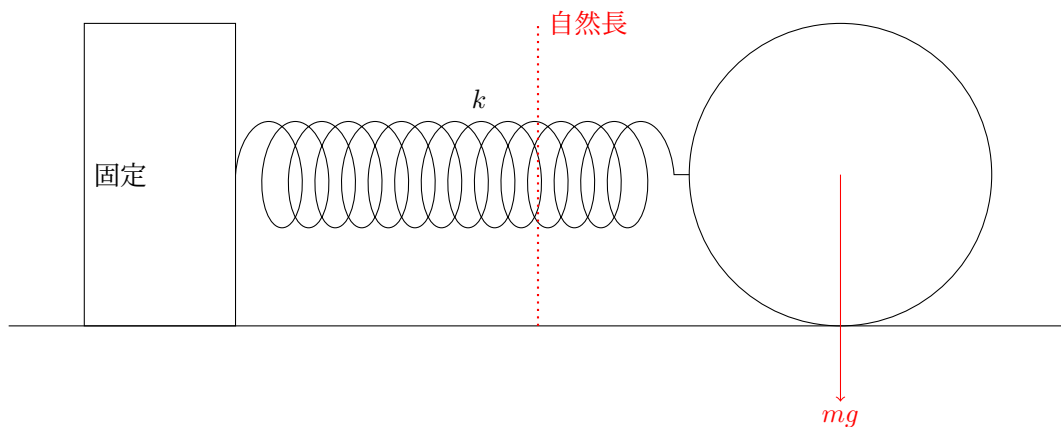


図1 横バネの単振動

図1の状況で運動方程式を立てると、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (2)$$

これを整理して、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (3)$$

ここで、 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおく (ω_0 は角振動数)。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \quad (4)$$

式4が整理した単振動の運動方程式である。これを解くと、単振動においては、変位は $x = A \sin \omega_0 t$ という式で表せることがわかる。ただし、 A はおもりの初期位置 (原点は自然長の位置) である。

3.2.2 強制振動の運動方程式を解く

強制振動の式を立てていく。強制振動は、単振動をしている物体に外部から力を加える運動である。ここでの角振動数を ω とする。加える力を $X = X_0 \sin \omega t$ とする。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + \frac{X_0}{m} \sin \omega t \quad (5)$$

移項して、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{X_0}{m} \sin \omega t \quad (6)$$

式6に $x = A \sin \omega t$ を代入して、

$$\frac{d^2 A \sin \omega t}{dt^2} + A \omega_0^2 \sin \omega t = \frac{X_0}{m} \sin \omega t \quad (7)$$

整理して、

$$-A \omega^2 \sin \omega t + A \omega_0^2 \sin \omega t = \frac{X_0}{m} \sin \omega t \quad (8)$$

$$A = \frac{X_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (9)$$

よって、変位の特殊解として、

$$x = \frac{X_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10)$$

が求まる。

共振、 $\omega_0^2 - \omega^2 = 0$ で、 x が無限に発散するとき起こる。以上のことを耐震に応用すると、共振を起こさないようにすればよいので、 x を ∞ に近づける、つまり $\omega_0^2 - \omega^2$ の絶対値を大きくすればよい。耐震のモデルにおいては、 ω^2 は地震の振動数であるため変えられない。よって、 ω_0^2 つまり建物の固有振動数になるべく大きくすればよい。

$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ の値がどのように変化するか、イメージが付きやすいようにグラフの概形を図 2 に示しておく。横軸は $\omega_0^2 - \omega^2$ を、縦軸は $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ を示している。

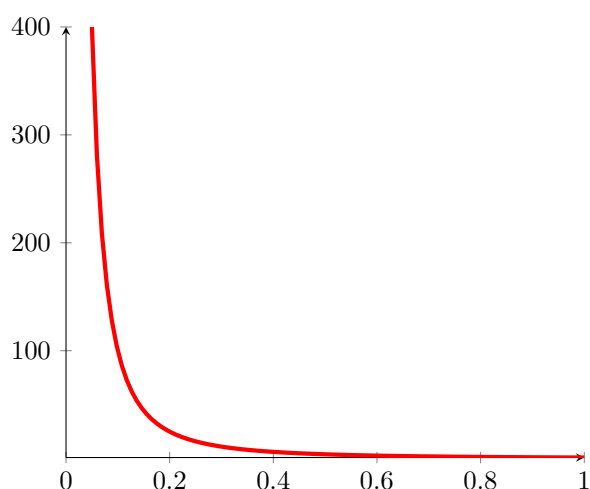


図 2 $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ のグラフの概形

グラフより、 $\omega_0^2 - \omega^2$ の値が 0 に近づくほど、爆発的に揺れが大きくなることがわかる。逆に、 $|\omega_0^2 - \omega^2|$ の値が大きくなればなるほど、揺れづらいことがわかる。

さて、ここからは余談であるが、地震の振動数が非常に大きかった場合はどうなるのかについて考えよう。先ほどの考え方より、 ω^2 の値が大きくなる、つまり $|\omega_0^2 - \omega^2|$ の値が非常に大きくなるため、建物は揺れづらいはずだ。この様子をシミュレーションした動画を、探究道場の YouTube チャンネルにアップロードした (図 3)。アフタヌーンティーとともにぜひとも楽しんでほしい。



図 3 <https://youtu.be/BU8MXxhKsKw>